

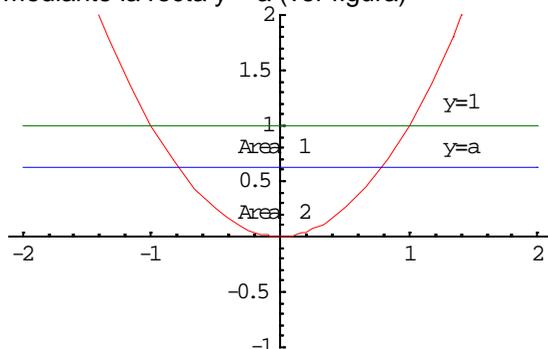
## OPCIÓN A

### Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 1 de sobrantes de 2001.

Se quiere dividir la región encerrada entre la parábola  $y = x^2$  y la recta  $y = 1$  en dos regiones de igual área mediante la recta  $y = a$ . Halla el valor de  $a$

#### Solución

Como se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola  $y = x^2$  (en rojo), y la recta  $y = 1$  (en verde) en dos regiones de igual área mediante la recta  $y = a$  (ver figura)



Para determinar el área limitada por dos funciones hemos de igualarlas para calcular sus puntos de corte

De  $y = x^2$  e  $y = 1$ , tenemos  $x^2 = 1$  de donde  $x = \pm 1$

De  $y = x^2$  e  $y = a$ , tenemos  $x^2 = a$  de donde  $x = \pm \sqrt{a}$

Tenemos que igualar las áreas para determinar el valor de "a", es decir  $\text{Área 1} = \text{Área 2}$

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_{-1}^1 (1) dx - \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a) dx - \int_{-1}^{-\sqrt{a}} (x^2) dx - \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2) dx = [x]_{-1}^1 - [ax]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} - \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{-\sqrt{a}} - \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{\sqrt{a}}^1 = \\ &= 2 - 2a\sqrt{a} + (2a\sqrt{a})/3 - 2/3 \end{aligned}$$

$$\text{Área 2} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = 2a\sqrt{a} - (2a\sqrt{a})/3$$

Igualando las áreas tenemos  $2 - 2a\sqrt{a} + (2a\sqrt{a})/3 - 2/3 = 2a\sqrt{a} - (2a\sqrt{a})/3$ , y operando nos resulta

$$\frac{1}{2} = a\sqrt{a}, \text{ de donde } a = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \approx 0'6299\dots, \text{ luego hay que dividirlo por la recta } y = 0'6299\dots$$

### Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 1 de sobrantes de 2001.

Sea  $f$  la función definida para  $x \neq 1$  por  $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$

(a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de  $f$

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de  $f$ .

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de  $f$

#### Solución

(a) Como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{x-1} = \frac{2(1)}{0^+} = +\infty$ ,  $x = 1$  es una A.V. de  $f$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{x-1} = \frac{2(1)}{0^-} = -\infty$

Tiene una A.O.  $y = mx + n$  porque es una cociente con el numerador de grado una unidad más que el denominador, con

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x(x-1)} = 2 \qquad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{x-1} - 2x \right) = 2$$

luego la A.O. es  $y = mx + n = 2x + 2$ . Se puede hacer rápidamente dividiendo numerador entre denominador

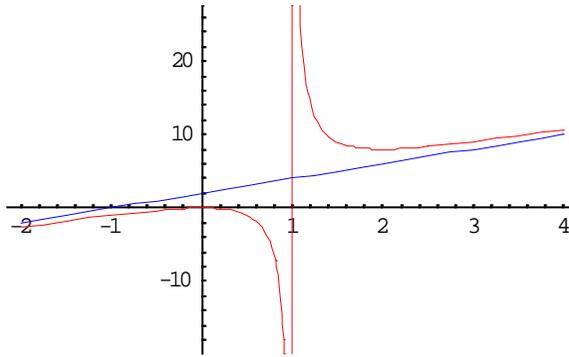
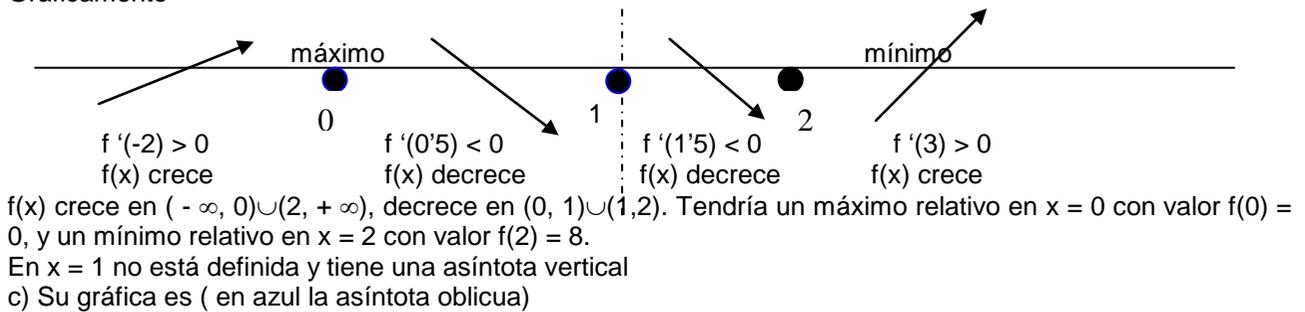
$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad \quad \quad | \quad x-1 \\ -2x^2 + 2x \quad \quad | \quad 2x+2 \\ \hline 2x \end{array}$$

b) Estudio de  $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - (1)(2x^2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0$ ;  $2x^2 - 4x = 0$ ;  $x(2x - 4) = 0$ , de donde  $x = 0$  y  $x = 4$  que serán los posibles máximos o mínimos

Hay que tener cuidado con  $x = 1$ , pues ahí no está definida la función  
Gráficamente



**Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 1 de sobrantes de 2001.**

[2'5 puntos] De las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  determina cuáles tienen inversa y en los casos en que exista, calcula el **determinante** de dichas matrices.

**Solución**

Para que una matriz tenga inversa ha de ser cuadrada y su determinante tiene que ser distinto de cero, por tanto descartamos la matriz B puesto que no es cuadrada

$|A| = -2 \neq 0$  luego existe  $A^{-1}$

$|C| = 0$  luego no existe  $C^{-1}$

$|D| = 1 \neq 0$  luego existe  $D^{-1}$ . En las matrices triangulares su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Sabemos que  $A \cdot A^{-1} = I$ , por definición de matriz inversa. Además por las propiedades de los determinantes

$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$ , por tanto  $|A^{-1}| = 1/|A|$ , con lo cual

$|A^{-1}| = 1/|A| = 1/(-2)$

$|A^{-1}| = 1/|A| = 1/1 = 1$

**Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 1 de sobrantes de 2001. -**

[2'5 puntos] Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene su centro en el semieje positivo de abscisas y es tangente a la recta de ecuación  $x+y = 1$

**Solución**

Como su centro está en el eje de abscisas es de la forma  $C(a,0)$

Como la circunferencia pasa por el origen su radio es  $r = d(C,O) = \|\overline{OC}\| = \sqrt{a^2+0^2} = a$

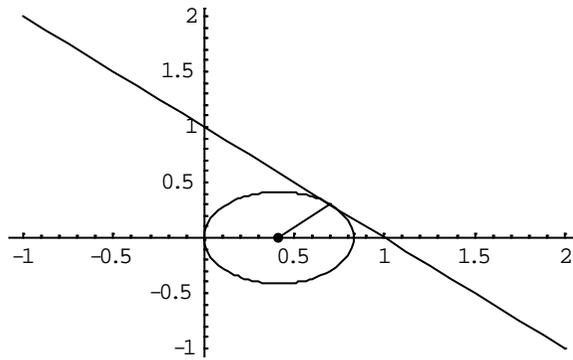
Como la circunferencia es tangente a la recta  $y = -x + 1$  resulta también que el radio es la distancia desde el centro a dicha recta, es decir  $r = d(C, \text{recta}) = \frac{|a+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|a-1|}{\sqrt{2}}$

Igualando las expresiones de los radios tenemos

$\frac{|a-1|}{\sqrt{2}} = a$ . Elevando al cuadrado tenemos  $a^2 = \frac{(a-1)^2}{2} = (a^2 - 2a + 1)/2$ , de donde  $a^2 + 2a - 1 = 0$ .

Resolviéndolo nos queda  $a = -1 \pm \sqrt{2}$ , y como  $a$  es positivo solo vale como radio  $a = -1 + \sqrt{2}$ , y el centro de la circunferencia es  $(-1 + \sqrt{2}, 0)$

Gráficamente



**Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 1 de sobrantes de 2001.**

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \begin{cases} 5x+10 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

(a) [1 punto] Esboza la gráfica de  $f$

(b) [1'5 puntos] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de  $f$ , el eje de abscisas y la recta  $x = 3$

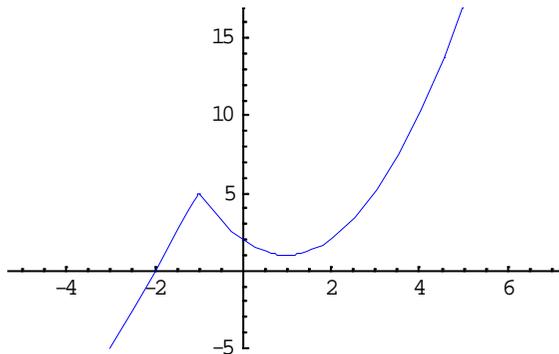
**Solución**

(a)

$5x + 10$  es una recta luego dándole valores podemos dibujarla

$y = x^2 - 2x + 2$  es una parábola por tanto necesitamos su vértice.,  $y' = 2x - 2$ ,  $y' = 0$ , luego la abscisa del vértice es  $x = 1$ , y la ordenada  $1 - 2 + 2 = 1$ . Vértice(1,1), y las ramas hacia arriba

La gráfica es



(b) la recta  $y = 5x + 10$  corta al eje OX en el punto  $x = -2$ , por tanto el área pedida es

$$\text{Área} = \int_{-2}^{-1} (5x+10) dx + \int_{-1}^3 (x^2-2x+2) dx = \left[ \frac{5x^2}{2} + 10x \right]_{-2}^{-1} + \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_{-1}^3 =$$

$$(5/2 - 10) - (10 - 20) + (9 - 9 + 6) - (-1/3 - 1 - 2) = 71 / 6 \text{ u.a.}$$

**Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 1 de sobrantes de 2001.**

[2'5 puntos] Siendo  $\text{Ln}(x)$  el logaritmo neperiano de  $x$ , calcula  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\text{Ln}(x)} \right)$ .

**Solución**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\text{Ln}(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x \text{Ln}(x) - x + 1}{(x-1)\text{Ln}(x)} \right) = \left( \frac{0}{0} \right) \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\text{Ln}(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\text{Ln}(x) + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\text{Ln}(x)}{x \cdot \text{Ln}(x) + (x-1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x \cdot \text{Ln}(x)}{x \cdot \text{Ln}(x) + (x-1)} \right) = \left( \frac{0}{0} \right) \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\text{Ln}(x) + x \cdot \frac{1}{x}}{\text{Ln}(x) + x \cdot \frac{1}{x} + 1} \right) = \frac{0 + 1}{0 + 1 + 1} = 1/2.$$

**Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 1 de sobrantes de 2001.**

Considera  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- (a) [1 punto] Determina el rango de A en función del parámetro a.  
 (b) [0'75 puntos] Discute en función de a el sistema, dado en forma matricial  $AX = B$ .  
 (c) [0'75 puntos] Resuelve  $AX = B$  en los casos en que sea compatible indeterminado.

**Solución**

(a)  $|A| = 1 \begin{vmatrix} a & 2 \\ -1 & a-2 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ a & 2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 2 + a(-4+3a) = 4a^2 - 6a + 2$ .

Resolvemos  $4a^2 - 6a + 2 = 0$  y obtenemos  $a = 1$  y  $a = 1/2$

Si  $a \neq 1$  y  $a \neq 1/2$  el  $\text{rango}(A) = 3$

Si  $a = 1$ ,  $|A| = 0$ . En  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  como  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , el  $\text{rango}(A) = 2$

Si  $a = 1/2$ ,  $|A| = 0$ . En  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$  como  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 1/2 \neq 0$ , el  $\text{rango}(A) = 2$

(b) La matriz de los coeficientes es  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$ , y la matriz ampliada  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ a & -1 & a-2 & 1 \end{pmatrix}$

Si  $a \neq 1$  y  $a \neq 1/2$  el  $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A^*)$  y el sistema es compatible y determinado por el Teorema de Rouché, es decir tiene solución única.

Si  $a = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . En  $A^*$  como  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ , tenemos que  $\text{rango}(A^*) = 2$

Como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$ , el sistema es compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones.

Este caso tendré que resolverlo en el apartado (c) y tomaré dos ecuaciones y dos incógnitas principales

Si  $a = 1/2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$ . En  $A^*$  como  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1/2(1 - 1/2) \neq 0$ , tenemos

que  $\text{rango}(A^*) = 3$

Como  $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ , el sistema es incompatible.

(c) Tengo que resolver el caso  $a = 1$ . Tomo dos ecuaciones (las dos primeras, pues con ellas me he asegurado que el rango era 2) y dos incógnitas principales

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \text{ . Tomo } z = \lambda$$

$y = -2z = -2\lambda$ ;  $x = 1 + 2y + 3z = 1 - 4\lambda + 3\lambda = 1 - \lambda$ . La solución del sistema es  $(x, y, z) = (1 - \lambda, -2\lambda, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 1 de sobrantes de 2001.**

[2'5 puntos] Considera los puntos  $A(1,0,3)$ ,  $B(3,-1,0)$ ,

$C(0,-1,2)$  y  $D(a,b,-1)$ . Halla a y b sabiendo que la recta que pasa por A y B corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D

**Solución**

Resta r que pasa por A y B. Punto  $A(1,0,3)$  y vector  $\mathbf{v} = \overline{AB} = (2, -1, -3)$

Resta s que pasa por C y D. Punto  $C(0,-1,2)$  y vector  $\mathbf{w} = \overline{CD} = (a, b+1, -3)$

Como la recta r corta perpendicularmente a la recta s los vectores directores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son perpendiculares es decir su producto escalar es cero

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2a + (-1)(b+1) + 9 = 0$ . Operando nos queda  $2a - b + 8 = 0$

Si los vectores directores son paralelos las rectas son paralelas y si los vectores directores no son paralelos las rectas se cortan o se cruzan, para lo cual tenemos que estudiar el determinante siguiente

$$\det(\overline{AC}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Si  $\det(\overline{AC}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$  las rectas se cruzan.

Si  $\det(\overline{AC}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$  las rectas se cortan que es el caso que nos han pedido

$$\det(\overline{AC}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ a & b+1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 \\ a & b+1-a & -3-a \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ b+1-a & -3-a \end{vmatrix} = (-1)(9+3a+5b+5-5a) =$$
$$= 2a - 5b - 14 = 0$$

Resolviendo el sistema  $\begin{cases} 2a - b + 8 = 0 \\ 2a - 5b - 14 = 0 \end{cases}$ , obtendremos a y b

$$4b + 22 = 0; b = -11/2$$

$$2a + 11/2 + 8 = 0; a = -27/4$$